6.9) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Busco autovalores de A:

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right)$$

Autovalores $\rightarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$

Por lo tanto, por el teorema de Rayleigh:

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = 3 \quad y \quad \min_{\|x\|=1} Q(x) = -2$$

b) Busco autoespacio asociado a $\lambda_M = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F2 \to 2F1+3F2 \\ F3 \to F1+3F3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F3 \to F2+F3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \to 3x - 3z = 0 \to x = z \\ 5y - 5z = 0 \to y = z \end{cases}$$

$$\to \bar{x} = z . \underbrace{(1,1,1)}_{\substack{\text{AVECT.} \\ \lambda_M = 3}}$$

Por lo que los maximizantes de los cocientes de Rayleigh son los x tq:

$x = \alpha . (1\ 1\ 1)$, $\|x\| \neq 0$

c) el autovector de $\lambda_m = -2$, como A es simétrica es un vector ortogonal a $(1\ 1\ 1)^T$, como por ejemplo, tomo $(-1\ 1\ 0)$. Los minimizantes son entonces los x tq:

$x = \alpha . (-1\ 1\ 0)$, $\|x\| \neq 0$

d) Como ahora tengo la restricción $\|x\| = 1$, los que maximizan $Q(x)$ son los vectores unitarios de $S_{\lambda M}$, es decir:

$$v1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T \quad y \quad v2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

e) Idem d)

$$\underbrace{v1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\right)^T \quad y \quad v2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\ 0\right)^T}_{\text{minimizantes de } Q(x),\ \|x\|=1}$$